

und  $\beta$ -Strahlen dieser (nach dem Ausfall der Kühlung entstehenden) Spaltprodukte darf aber gegenüber der im vorigen Abschnitt behandelten Leistung wegen seines geringen Betrages (etwa 5%) vernachlässigt werden.

Uns interessiert also nur die Leistung der verzögerten  $\gamma$ - und  $\beta$ -Strahlen, die durch die vor dem Ausfall der Kühlung entstandenen Spaltprodukte produziert wird. Für die Zeit des Abklingens der Leistung im Reaktor nehmen wir hierfür als vorsichtige Abschätzung an, daß die Leistung der verzögerten Strahlung zeitlich konstant ist und den gleichen Betrag wie im vorausgehenden stationären Betrieb hat (10 MeV pro Spaltung). Die zusätzliche Temperaturerhöhung ist dann für diesen Zeitraum gegeben durch:

$$E \frac{dT_{\beta,\gamma}}{dt} = \Sigma_f V \Phi_0 \cdot (10 \text{ MeV}), \quad (19)$$

wobei  $\Sigma_f$  der makroskopische Absorptionsquerschnitt für Spaltung,  $\Phi_0$  der stationäre Fluß und  $V$  das Uranvolumen ist. Nimmt man (als ungünstigsten Fall) an, daß die entstehende Wärme nur vom Uran aufgenommen wird, so ergibt sich hieraus für natürliches Uran

$$T_{\beta,\gamma} = t \cdot \Phi_0 \cdot 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (20)$$

wenn  $t$  in sec und  $\Phi_0$  in  $\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$  gemessen wird.

Für reines  $^{235}\text{U}$  ergibt sich

$$T_{\beta,\gamma} = t \cdot \Phi_0 \cdot 190 \cdot 10^{-13} \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (21)$$

Während bei der früher berechneten Maximaltemperatur die Wurzel aus der Leistung bzw. aus dem Fluß eingeht, ist dieser Temperaturanstieg dem Fluß direkt proportional. Hiernach würde z. B. nach 3 Minuten zu den in Abb. 3 angegebenen Temperaturen  $2,2 \text{ } ^\circ\text{C}$  ( $\Phi_0 = 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ) bzw.  $22 \text{ } ^\circ\text{C}$  ( $\Phi_0 = 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ) zu addieren sein. Bei Reaktoren mit größeren Flüssen, besonders bei angereichertem  $^{235}\text{U}$ , kann der Temperaturanstieg durch verzögerte Strahlung den früher berechneten wesentlich übertreffen.

Way und Wigner<sup>4</sup> haben für die verzögerte Leistung einer Spaltung eine empirische Formel abgeleitet, die einen Gültigkeitsbereich von etwa einer Minute bis 100 Tagen hat. Wendet man diese Formel an, so ergibt sich für die Gl. (20) und (21) statt des linearen Anstieges in  $t$  ein schwächerer Anstieg mit  $(t)^{0,8}$ . Wir können daher die obigen Gleichungen als eine obere Grenze betrachten.

Herrn Prof. K. Wirtz möchten wir für die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung vielmals danken.

<sup>4</sup> K. Way u. E. P. Wigner, Phys. Rev. **73**, 1318 [1948].

## Wachstumskurven bei großen optischen Dicken

Von LENNART HULDT

Aus dem Institut für Physik der Universität Stockholm

(Z. Naturforsch. **9a**, 1043—1047 [1954]; eingegangen am 26. September 1954)

Wachstumskurven, welche die Beziehung zwischen Spektrallinienintensität — in Emission oder Absorption — und optischer Dicke darstellen, sind bis jetzt unter Annahme einer Überlagerung von Doppler-Form und Resonanzform der Spektrallinie berechnet worden. In größerer Entfernung von der Linienmitte weicht aber die Linienkontur von der einfachen Resonanzverteilung ab. Dies führt bei großen optischen Dicken zu einer von den früheren Resultaten etwas abweichenden Form der Wachstumskurven. Eine Berechnung dieser unter Zugrundelegung von Lindholms Druckverbreiterungsformeln, die sich experimentell gut bestätigt haben, wird hier für den Bereich durchgeführt, in welchem das Verhalten der äußeren Linienflügel entscheidend ist.

Die Äquivalentbreite  $W$  einer Spektrallinie der Wellenzahl  $\sigma_0$  kann geschrieben werden:

$$W = E/I_0(\sigma_0),$$

wo im Falle der Absorption  $E$  die gesamte absorbierte Energie und  $I_0(\sigma_0)$  die Intensität der einfallenden Strahlung (über den Bereich der Linie als konstant angenommen) bedeuten. Im Falle der

Emission bedeutet  $E$  die Energie der emittierten Linie und  $I_0(\sigma_0)$  die Intensität der Planckschen Strahlung bei der Wellenzahl  $\sigma_0$  und der gegebenen Lichtquellentemperatur, welche letztere allerdings nur formal zu sein braucht.

In beiden Fällen ist die Äquivalentbreite durch den Ausdruck gegeben:

$$W = \int (1 - e^{-\kappa(\sigma)\tau}) d\sigma, \quad (1)$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

wo das Integral über das Gebiet der Linie oder des Linienkomplexes zu nehmen ist. Wird die optische Dicke  $\tau$  durch

$$\tau = N f l$$

definiert, wobei  $N$  die Anzahl der absorbierenden oder emittierenden Atome oder Moleküle pro Volumeneinheit,  $f$  der  $f$ -Wert der Linie und  $l$  die Schichtdicke ist, so wird  $\kappa(\sigma)$  nur ein Formfaktor für die Linienkontur (Dimension  $\text{cm}^2$ ), welcher der Bedingung

$$\int \kappa(\sigma) d\sigma = \pi e^2/m c^2 = q = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{cm} \quad (2)$$

unterworfen ist<sup>1</sup>.

Die Äquivalentbreite  $W$  als Funktion der optischen Dicke  $\tau$  nach Gl. (1) stellt die sogenannte Wachstumskurve dar. Die Form dieser Kurve ist offenbar von der Form der Funktion  $\kappa(\sigma)$  abhängig. Gewöhnlich wird eine Überlagerung der Doppler-Kontur und der Lorentzschen Resonanzstruktur postuliert. Wachstumskurven, auf dieser Annahme begründet, sind u. a. von van der Held<sup>1,2</sup> und von Penner und Kavanagh<sup>3</sup> berechnet. Für große optische Dicken ist die Absorption in dem zentralen Gebiet der Linie fast vollständig, d. h. der Integrand in Gl. (1) wird dort praktisch gleich 1. In diesem Falle ist somit der Verlauf der Funktion  $\kappa$  für kleine  $|\sigma - \sigma_0|$  ohne Bedeutung. Entscheidend ist nur der Verlauf für größere  $|\sigma - \sigma_0|$ , wo die Absorption merklich verschieden von 1 ist. Daraus folgt, daß für große  $\tau$ , wo die Linienflügel den Verlauf der Wachstumskurven bestimmen, dieser nicht von der Doppler-, sondern nur von der Lorentz-Kontur geregelt wird, da die erstere exponentiell, die letztere nur wie  $(\sigma - \sigma_0)^{-2}$  abnimmt.

Für die Linienflügel gilt aber nach mehreren Beobachtungen die Lorentzsche Formel nicht. Sie ist dort vielmehr durch jene zu ersetzen, welche Lindholm<sup>4</sup> aus seiner strengen Stoßtheorie abgeleitet hat und die sich nach Absorptionsmessungen von Minkowski<sup>5</sup> und Kuhn<sup>6</sup> gut bewährt hat. Neuerdings<sup>7</sup> wurden bei Emissionsmessungen an Na-Linien in einer Flamme Linienkonturen aufgenommen, die sich mit den Lind-

holmschen Formeln gut interpretieren lassen. Die üblichen Wachstumskurven müssen daher für große optische Dicken etwas abgeändert werden.

### Spektrallinienform nach Lindholm

Die Lindholmschen Formeln lauten, nach Gl. (2) normiert, für das Linienzentrum:

$$\kappa(\sigma) = \frac{q}{\pi \gamma} \frac{0,795 h}{(0,795 h)^2 + k^2}, \quad (3a)$$

wo ein Asymmetriefaktor fortgelassen ist; für den roten Flügel:

$$\kappa(\sigma) = \frac{q}{\pi \gamma} \left( \frac{0,741 h}{(-k)^{-5/2}} + \frac{0,254 h}{(-k)^{7/3}} \right); \quad (3b)$$

für den violetten Flügel:

$$\kappa(\sigma) = (q/\pi \gamma)/(0,507 h/k^{7/3}). \quad (3c)$$

(3b) und (3c) sind auf Glieder ersten Grades in  $h$  beschränkt, was für mäßige Drucke berechtigt ist.

In den Gln. (3) bedeutet

$$k = (\sigma - \sigma_m)/\gamma, \quad (4a)$$

wo  $\sigma_m < \sigma_0$  (Rotverschiebung), was indessen für unseren Zweck belanglos ist. Ferner ist

$$h = n_1 q (3 \pi^2 b/8 \bar{v})^{3/5} \quad (4b)$$

und

$$(1/\gamma) = (q c/\bar{v})/(3 \pi^2 b/8 \bar{v})^{1/5}, \quad (4c)$$

wo  $n_1$  die Anzahl der stoßenden Moleküle pro Volumeneinheit,  $b$  die van der Waalsche Konstante (in  $\text{cm}^6 \text{sec}^{-1}$ ),  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\bar{v}$  die mittlere Relativgeschwindigkeit  $\bar{v} = \sqrt{(8 kT/\pi) (1/m_1 + 1/m_2)}$  ist.  $q$  ist ein Zahlenfaktor, welchen Lindholm gleich  $64/3 = 21,3$  setzt. Eine Verknüpfung mit der Lorentzschsen Halbwertsbreite  $b_L$  ist nach Gl. (3a), die wesentlich mit der Lorentzschsen übereinstimmend ist, und Gl. (4) zu erzielen durch

$$b_L = 0,795 h \gamma = 0,795 n_1 \frac{\bar{v}}{c} \left( \frac{3 \pi^2 b}{8 \bar{v}} \right)^{2/5}. \quad (5)$$

Ein Vergleich mit den experimentellen Daten von Huldt und Knall<sup>7</sup> ist infolge der verwickelten Zusammensetzung der Flamme schwer durchzuführen. Die Größenordnungen scheinen aber plausibel und berechtigen die Vernachlässigungen in (3b) und (3c).

<sup>1</sup> S. z. B. A. Mitchell u. M. Zemansky, *Resonance Radiation and Excited Molecules*, Cambridge 1934.

<sup>2</sup> E. M. F. van der Held, *Z. Phys.* **70**, 508 [1931].

<sup>3</sup> S. S. Penner u. R. W. Kavanagh, *J. Opt. Soc. Amer.* **43**, 385 [1953].

<sup>4</sup> E. Lindholm, *Ark. Mat. Astr. Fys. A* **32**, Nr. 17 [1945].

<sup>5</sup> R. Minkowski, *Z. Phys.* **93**, 731 [1935].

<sup>6</sup> H. Kuhn, *Proc. Roy. Soc. A* **158**, 212 [1937].

<sup>7</sup> L. Huldt u. E. Knall, *Z. Naturforsch.* **9a**, 663 [1954].

Die Äquivalentbreite ist nun, mit  $\chi = \varrho \tau \hbar / \pi \gamma$ , durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$W = W_r + W_v;$$

roter Flügel:

$$\frac{W_r}{\gamma} = w_r = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left( -\chi \left( \frac{0,741}{k^{3/2}} + \frac{0,254}{k^{7/3}} \right) \right) \right\} dk; \quad (6a)$$

violetter Flügel:

$$\frac{W_v}{\gamma} = w_v = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left( -\chi \frac{0,507}{k^{7/3}} \right) \right\} dk. \quad (6b)$$

Zum Vergleich wird auch der entsprechende Ausdruck für die Lorentz-Verteilung [Gl. (3a)] herangezogen, wobei die Konstante im Nenner vernachlässigt wird:

$$\frac{W_{\text{Lorentz}}}{\gamma} = 2 \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left( -\chi \frac{0,795}{k^2} \right) \right\} dk. \quad (7)$$

### Asymptotische Lösung für sehr große $\chi$

Für sehr große  $\chi$  wird der Integrand in (6a) erst bei so großen  $k$ -Werten von 1 verschieden, daß das zweite Glied im Exponenten gegen das erste vernachlässigt werden kann. Sämtliche drei Integrale (6a), (6b) und (7) nehmen dann die Form an

$$w_p(C) = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp(-C/k^p) \right\} dk \quad (8)$$

mit  $p$  bzw. gleich  $3/2$ ,  $7/3$  und  $2$ .

Das Integral (8) kann für alle  $p > 1$  auf die  $\Gamma$ -Funktion zurückgeführt werden. Aus einer einfachen Variablentransformation geht hervor, daß

$$w_p(C) = C^{1/p} \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp(-1/k^p) \right\} dk = C^{1/p} w_p(1). \quad (9)$$

Folglich ist

$$\frac{dw_p}{dC} = \frac{1}{p} C^{1/p-1} w_p(1). \quad (10)$$

Andererseits ergibt Differentiation von (8)

$$\frac{dw_p}{dC} = \int_0^\infty k^{-p} \exp(-C/k^p) dk. \quad (11)$$

Wird hier die Substitution  $x = C/k^p$  gemacht, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dw_p}{dC} &= \frac{1}{p} C^{1/p-1} \int_0^\infty x^{-1/p} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{p} C^{1/p-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

wonach durch Vergleich mit (10) und (9)

$$w_p(C) = C^{1/p} \Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (12)$$

Die betreffenden Zahlenwerte sind<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} p = \frac{3}{2} & \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,679, \\ p = 2 & \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1,772 = \sqrt{\pi}, \\ p = \frac{7}{3} & \quad \Gamma\left(\frac{4}{7}\right) = 1,559. \end{aligned}$$

Für die Lorentz-Verteilung ergibt sich hiernach, wenn

$$C = 0,795 \chi = 0,795 \frac{\varrho \tau \hbar}{\pi \gamma} = \frac{\varrho \tau b_L}{\pi \gamma^2}$$

eingesetzt wird, die wohlbekannte Formel:

$$W_{\text{Lorentz}} = 2 \gamma \sqrt{\pi} \left( \frac{\varrho \tau b_L}{\pi \gamma^2} \right)^{1/2} = 2 \sqrt{\varrho \tau b_L}. \quad (13)$$

Für die Lindholm-Verteilung wird entsprechend

$$\begin{aligned} W/\gamma = w_r + w_v &= 2,679 (0,741 \chi)^{2/3} + 1,559 (0,507 \chi)^{3/7} \\ &= 2,19 \chi^{2/3} + 1,165 \chi^{3/7}. \end{aligned} \quad (14)$$

### Genauere Berechnung des roten Flügels

Zur Abkürzung setzen wir

$$C_1 = 0,741 \chi, \quad C_2 = 0,254 \chi, \quad (15)$$

somit

$$C_1/C_2 = 2,92 = 1/0,342,$$

ferner

$$A = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp(-C_1/k^{3/2}) \right\} dk = C_1^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (16)$$

und

$$B = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp(-C_2/k^{7/3}) \right\} dk = C_2^{3/7} \Gamma\left(\frac{4}{7}\right). \quad (17)$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\alpha-\beta} &= (1 - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} (1 - e^{-\beta}) \\ &= (1 - e^{-\beta}) + e^{-\beta} (1 - e^{-\alpha}) \end{aligned}$$

und

$$1 - e^{-\alpha-\beta} = (1 - e^{-\alpha}) + (1 - e^{-\beta}) - (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta})$$

gilt dann

$$\frac{A}{B} \Big\} < w_r < A + B.$$

Für große  $\chi$  ist  $A > B$ , für kleine  $A < B$ . Es empfiehlt sich somit,  $w_r = A + \Delta_A$  für große  $\chi$  und  $w_r = B + \Delta_B$  für kleine  $\chi$  zu setzen und die Korrekturen  $\Delta$  numerisch zu berechnen.

<sup>8</sup> Z. B. Jahnke-Emde: Funktionstabellen, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1938.

Es gilt

$$\Delta_A = w_r - A \quad (18)$$

$$= \int_0^\infty \exp(-C_1/k^{3/2}) \{1 - \exp(-C_2/k^{7/3})\} dk$$

und

$$\Delta_B = w_r - B \quad (19)$$

$$= \int_0^\infty \exp(-C_2/k^{7/3}) \{1 - \exp(-C_1/k^{3/2})\} dk.$$

Wir suchen zuerst eine Approximation für  $\Delta_B$ . Durch Reihenentwicklung des Klammerausdruckes in (19) erhält man

$$\Delta_B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} C_1^n G_n(C_2), \quad (20)$$

wo

$$G_n(C_2) = \int_0^\infty k^{-3n/2} \exp(-C_2/k^{7/3}) dk. \quad (21)$$

Setzen wir in Gl. (21)

$$x = C_2/k^{7/3}, \text{ so ist } k^{-3n/2} = C_2^{-9n/14} x^{9n/14} \text{ und}$$

$$dk = -\frac{3}{7} C_2^{3/7} x^{-10/7} dx. \text{ Dann wird:}$$

$$G_n(C_2) = C_2^{3/7-9n/14} \int x^{9n/14-10/7} e^{-x} dx$$

$$= C_2^{3/7-9n/14} \Gamma\left(\frac{9n}{14}-\frac{3}{7}\right). \quad (22)$$

Gl. (22), in (20) eingesetzt, ergibt:

$$\Delta_B = \frac{3}{7} C_2^{3/7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \Gamma\left(\frac{9n-6}{14}\right) z^n, \quad (23)$$

wo

$$z = C_1 \cdot C_2^{-9/14} = (C_1/C_2) C_2^{5/14} = 2,92 C_2^{5/14}.$$

Da für wachsende  $n$  wesentlich

$$\frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{9n-6}{14}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{9n-6}{14}\right)}{\Gamma(n+1)} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{-5n/14}$$

gilt, ist die Entwicklung (23) für alle  $z$  absolut konvergent. Praktisch wird aber die Konvergenz für  $\chi > 1$  allzu langsam. Wir können aber eine entsprechende Annäherung von  $\Delta_A$  durch eine pseudokonvergente Reihe erlangen. Schreiben wir den Integranden der Gl. (18)

$$\exp(-C_1/k^{3/2}) \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} C_2^n k^{-7n/3} + \frac{(-1)^{N-1}}{N!} C_2^N k^{-7N/3} \exp(-\Theta C_2/k^{7/3}) \right\}$$

mit  $0 < \Theta < 1$ , so wird Gl. (18)

$$\Delta_A = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} C_2^n F_n(C_1) + R_N, \quad (24)$$

wo

$$F_n(C_1) = \int_0^\infty k^{-7n/3} \exp(-C_1/k^{3/2}) dk \quad (25)$$

und

$$R_N = \frac{(-1)^{N-1}}{N!} C_2^N \cdot \int_0^\infty k^{-7N/3} \exp(-C_1/k^{3/2} - \Theta C_2/k^{7/3}) dk. \quad (26)$$

Für Gl. (25) erhalten wir mit der Substitution  $x = C_1/k^{3/2}$

$$F_n(C_1) = \frac{2}{3} C_1^{2/3-14n/9} \int_0^\infty x^{14n/9-5/3} e^{-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} C_1^{2/3-14n/9} \Gamma\left(\frac{14n}{9}-\frac{2}{3}\right). \quad (27)$$

Das Restglied (26) wird

$$|R_N| < \frac{1}{N!} C_2^N \int_0^\infty k^{-7N/3} \exp(-C_1/k^{3/2}) dk$$

$$= \frac{1}{N!} C_2^N F_N(C_1). \quad (28)$$

Gl. (27), in (24) eingesetzt, ergibt:

$$\Delta_A = \frac{2}{3} C_1^{2/3} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \Gamma\left(\frac{14n-6}{9}\right) z^n + R_N$$

(29)

mit

$$z = C_2 \cdot C_1^{-14/9} = (C_2/C_1) C_1^{-5/9} = 0,342 C_1^{-5/9}.$$

Obwohl mit wachsendem  $n$  das  $n$ -te Glied in der Summe (29) wie  $n^{5n/14}$  zunimmt, ergibt die Reihe (29) doch wegen (28) für kleine  $z$  (entsprechend  $\chi > 1$ ) eine gute Annäherung für  $\Delta_A$ . Mit den Reihenentwicklungen (23) oder (29) ist es möglich,  $w_r$  mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Nur in dem Grenzgebiet ( $\chi \sim 1$ ) ist es notwendig, für die numerische Berechnung mehr als drei Glieder mitzunehmen.

### Schlußbemerkungen

Abb. 1 zeigt die nach den vorstehenden Ausführungen berechnete Wachstumskurve im Vergleich mit der sich nach der Lorentzschen Theorie ergebenden. Bei der Anwendung auf Probleme aus Astrophysik oder Experimentalphysik entsteht nun die Frage nach der Größe der Parameter  $\gamma$  und  $h$ . Für eine Abschätzung können die Beziehungen (4) und (5) herangezogen und danach  $\gamma$  proportional  $1/\sqrt{b_L}$  und  $h/\gamma$  proportional  $n_1 b_L^2$  gesetzt werden. Dazu kommt die durch  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$  bedingte Abhängigkeit der Temperatur. Die Daten der erwähnten Flamme<sup>7</sup> ergeben mit  $b_L = 0,05 \text{ cm}^{-1}$



die van der Waalsche Konstante  $b = 4 \cdot 10^{-31} \text{ cm}^6 \text{ sec}^{-1}$ , was allerdings einen nicht näher definierbaren Mittelwert darstellt.

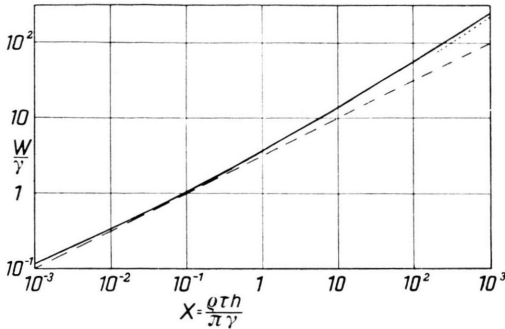


Abb. 1. Wachstumskurve. Ausgezogen: Lindholmsche Verteilung; gestrichelt: Lorentzsche Verteilung; punktiert:  $A(\chi)$ .

Die Gerade, die das Wachstum der Lorentzverbreiterten Linie darstellt, ist nach Gl. (13) einfach von der Halbwertsbreite  $b_L$  abhängig.

### Zur Protonenverteilung in schweren Kernen

Von Karl Wildermuth

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. 9a, 1047–1050 [1954]; eingeg. am 21. Oktober 1954)

Die Streuung von schnellen Elektronen in schweren Kernen<sup>1</sup>, sowie die Ausmessung der Energieniveaus von  $\mu$ -Mesonaten<sup>2</sup> haben gezeigt, daß die Verteilung der Protonen in schweren Kernen einem  $R_0 A^{1/3}$  Gesetz gehorcht, bei dem  $R_0$  ungefähr den Wert  $1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  besitzt. Aus der Streuung von schnellen Neutronen an schweren Kernen<sup>3</sup> folgt dagegen ein  $R_0$ -Wert von ungefähr  $1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Etwa derselbe  $R_0$ -Wert folgt aus der Streuung von schnellen Protonen<sup>4</sup> an mittleren und schweren Kernen und dem  $\alpha$ -Zerfall schwerer Kerne<sup>5</sup>. Daraus läßt sich erkennen, daß in schweren Kernen die Randzone hauptsächlich von Neutronen besetzt ist und die Protonen mehr im Innern angeordnet sind, während man wegen der gegenseitigen elektrostatischen Abstoßung gerade das Gegenteil erwarten sollte. Hier soll nun kurz gezeigt werden, daß man im Rahmen unserer heutigen Vorstellung über die Kernkräfte dieses Verhalten der Protonen zumindest qualitativ verstehen kann.

<sup>1</sup> Hofstadter, Fechter u. J. A. McIntyre, Phys. Rev. 91, 422 [1953]; 92, 978 [1953]. — L. I. Schiff, Phys. Rev. 92, 988 [1953].

<sup>2</sup> Vgl. L. Fitch u. J. Rainwater, Phys. Rev. 92, 789 [1953]. — L. N. Cooper u. E. M. Henley, Phys. Rev. 92, 801 [1953]. — J. A. Wheeler, Phys. Rev. 92, 812 [1953].

<sup>3</sup> Fehsbach u. Weißkopf, Phys. Rev. 71, 145 [1947].

Wie aus Abb. 1 ersichtlich, ist stets

$$W_{\text{Lindholm}} > W_{\text{Lorentz}}.$$

Im Intervall  $10^{-3} < \chi < 10$  unterscheiden sich die Kurven wenig voneinander; erst bei  $\chi = 200$  erreicht die Abweichung einen Faktor 2. Für  $\chi > 10^3$  ist  $W_{\text{Lindholm}}$  praktisch exakt nach Gl. (14) zu berechnen, und zwar überwiegt dort das erste Glied, welches den Energieinhalt des roten Flügels angibt. Der Betrag dieses Gliedes ist in die Abbildung mittels der punktierten Gerade eingetragen.

Zum Schluß möge hervorgehoben werden, daß die Lindholmsche Theorie streng nur für Atome mit der inneren Quantenzahl  $J = 0$  gelten soll<sup>9</sup> und daß es somit nicht unbedingt zulässig ist, sie als ein allgemeines Gesetz anzusehen.

<sup>9</sup> B. Kleman u. E. Lindholm, Ark. Mat. Astr. Fys. B 32, Nr. 10 [1945].

Es wird dazu von der Bethe-Weizsäcker-Formel für die Kernbindungsenergien ausgegangen:

$$E_{\text{Bind}} = -aA - b \frac{(N-Z)^2}{A} + cA^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (1)$$

mit

$$a = +14,67 \text{ MeV}; \quad b = 20,5 \text{ MeV};$$

$$c = 15,37 \text{ MeV}; \quad R_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Da es darauf ankommt, die Kräfte zu untersuchen, die auf die Protonen und Neutronen im Kern wirken, wird, um die potentielle Energie der Nukleonen im Kern zu erhalten, von der Kernbindungsenergie die kinetische Energie der Nukleonen abgezogen<sup>6,7</sup>. Sie ergibt sich im Rahmen des Fermi-Gas-Modells, bei dem man sich vorstellt, daß sich die Nukleonen frei in einem Potentialtopf vom Radius  $R_0 A^{1/3}$  und der Potentialtopftiefe  $V_0$  (wird später festgelegt) bewegen, bekanntlich zu<sup>6,7</sup>

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin Neutron}} + E_{\text{kin Proton}}$$

$$= \frac{27}{40} \frac{\hbar^2}{MR_0^2} \left( \frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{1}{A^{2/3}} \cdot \frac{1}{2} [(2N)^{5/3} + (2Z)^{5/3}] \quad (2)$$

$$= 14,6 A + 8,13 \frac{(N-Z)^2}{A}.$$

<sup>4</sup> Blaser, Boehm, Marmier u. Peaslee, Helv. Phys. Acta 24, 3 [1951].

<sup>5</sup> Devarey, Thesis, M. I. T. [1950].

<sup>6</sup> Heisenberg-Macke, Theorie des Atomkerns (1951). Max-Planck-Gesellschaft, Dokumentationsstelle Göttingen.

<sup>7</sup> Woeste, Z. Phys. 137, 228 [1954].

Die potentielle Energie der Nukleonen im Kern wird damit<sup>8</sup>

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{Bind}} - E_{\text{kin}} \\ = -29,27 A + 12,37 \frac{(N-Z)^2}{A} + 15,37 A^{2/3} + 0,616 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (3)$$

Um die mittlere potentielle Energie zu erhalten, die ein Neutron bzw. Proton im Kern besitzt, bildet man zunächst:

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial N} = -29,27 + 12,37 \left\{ \frac{2(N-Z)}{A} - \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right\} \\ + \frac{2}{3} \cdot 15,37 A^{-1/3} - \frac{1}{3} \cdot 0,616 \frac{Z^2}{A^{4/3}}, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial Z} = -29,27 + 12,37 \left\{ -\frac{2(N-Z)}{A} - \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right\} \\ + \frac{2}{3} \cdot 15,37 A^{-1/3} - \frac{1}{3} \cdot 0,616 \frac{Z^2}{A^{4/3}} + 0,616 \cdot 2 \cdot Z/A^{1/3}. \quad (4b)$$

Für diese Betrachtungen ist es zweckmäßig, den negativen Betrag der Energie als potentielle Energie eines Nukleons im Kern anzusehen, den man aufwenden muß, um ein Nukleon unter Beibehaltung seiner kinetischen Energie aus dem Kern zu entfernen. Der negative Gradient dieser Energie ist nämlich für die rücktreibende Kraft maßgebend, die auf ein Nukleon bei seiner Entfernung aus dem Kern wirkt. Zu den Ausdrücken (4a) und (4b) kommt dann noch ein negativer Energiebetrag hinzu. Dieser rührt davon her, daß bei der Entfernung eines Nukleons aus dem Kern der Kern zusammenschrumpft und dadurch die Energieniveaus der Nukleonen weiter auseinanderrücken<sup>7</sup>. Die mittlere kinetische Energie der Nukleonen des Restkerns wird dadurch erhöht. Diese Energieerhöhung muß bei der Entfernung eines Nukleons aus dem Kern zusätzlich aufgebracht werden. Aus (2) folgt dafür:

$$\frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{2}{3} \frac{1}{A} E_{\text{kin}} \\ = -\frac{2}{3} \left\{ 14,6 + 8,13 \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right\}. \quad (5)$$

Damit ergibt sich für die potentielle Energie eines Neutrons bzw. eines Protons

$$E_{\text{pot}}^N = -39,02 + 24,74 \frac{N-Z}{A} - 17,79 \frac{(N-Z)^2}{A^2} \\ + 10,25 A^{-1/3} - 0,205 \frac{Z^2}{A^{4/3}}, \quad (6a)$$

$$E_{\text{pot}}^P = -39,02 - 24,74 \frac{N-Z}{A} - 17,79 \frac{(N-Z)^2}{A^2} \\ + 10,25 A^{-1/3} - 0,205 \frac{Z^2}{A^{4/3}} + 1,232 \frac{Z}{A^{1/3}}. \quad (6b)$$

<sup>8</sup> Durch Vergleich von (2) und (3) sieht man, daß ungefähr  $\frac{1}{3}$  der Asymmetrienergie durch die kinetische Energie der Nukleonen und der Rest durch die potentielle Energie der Kernkräfte gedeckt wird.

<sup>9</sup> Es wird dabei angenommen, daß die Abfallsbreite des Kernpotentials gleich der Abfallsbreite der Kernmaterie ist<sup>10,11</sup>, was sicher ungefähr richtig ist.

Aus Gl. (6) sieht man, daß sich die potentielle Energie von Proton und Neutron im Kern außer durch ihre verschiedene Coulomb-Energie auch noch durch ihre verschiedene Asymmetrienergie unterscheidet. Sie ist für ein Neutron positiv und für ein Proton negativ. Das ist verständlich, da bei der Entfernung eines Neutrons aus dem Kern der Neutronenüberschuß abnimmt, d. h. die Asymmetrienergie nimmt ab. Bei der Entfernung eines Protons ist es gerade umgekehrt. Mit dem Gradienten dieser Asymmetrienergie ist beim Neutron eine Abstoßungskraft und beim Proton eine Anziehungskraft verbunden, die die hauptsächlich vom Gradienten der Volumenenergie herrührende Anziehungskraft am Kernrand schwächt, bzw. verstärkt. Diese gegenüber einem Neutron verstärkte Anziehungskraft auf ein Proton überwiegt die Coulombsche Abstoßungskraft auf das Proton am Kernrand bei weitem. Betrachtet man z. B. den  $^{200}_{80}\text{Hg}$ -Kern, der für die weiteren Überlegungen immer zugrunde gelegt werden soll, und nimmt an, daß die Abfallsbreite des Kernpotentials am Kernrand ungefähr  $2 \cdot 10^{-13}$  cm ist, so ergibt sich für diese Kraftdifferenz zwischen Proton und Neutron<sup>9</sup>  $\approx 8 \cdot 10^7$  dyn, während die Coulombsche Abstoßungskraft auf ein Proton am Kernrand ungefähr  $2,7 \cdot 10^7$  dyn beträgt. Diese zusätzliche Anziehungskraft auf die Protonen zusammen mit der gegenüber den Neutronen geringeren mittleren kinetischen Energie der Protonen im Kern ist von den Kräften her betrachtet z. B. daran schuld, daß bei Erhitzung eines schweren Kerns zuerst Neutronen weggedampft werden. Genau dieselben Ursachen sind dafür verantwortlich, daß bei schweren Kernen die Randzone hauptsächlich von Neutronen und nicht von Protonen besetzt ist, wie jetzt etwas genauer gezeigt werden soll.

Zuvor sei aber noch bemerkt, daß die eben erläuterte Volumenenergie und Asymmetrienergie quantitativ recht gut aus den aus Zweinukleonenstreuversuchen bekannten Zweikörperkräften folgen<sup>11,12</sup>.

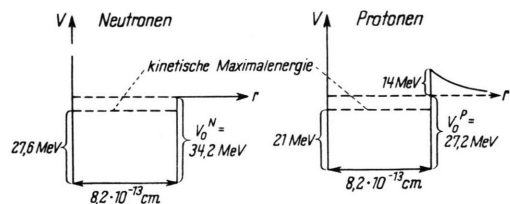


Abb. 1.

Mittels der Gl. (6) erhält man für den Kern  $^{200}_{80}\text{Hg}$  den in Abb. 1 dargestellten Potentialverlauf für ein Neutron bzw. Proton.

Bei diesem Potentialverlauf für ein Neutron bzw. Proton wurde zunächst angenommen, daß das Kernkraftpotential (Volumenenergie und Asymmetriener-

<sup>10</sup> C. F. v. Weizsäcker, Z. Phys. **96**, 431 [1935].

<sup>11</sup> W. Wild u. K. Wildermuth, Z. Naturforschg. **9a**, 799 [1954].

<sup>12</sup> Schlögl, Z. Phys. **135**, 441 [1954]. — A. Florian, P. Urban u. K. Wildermuth, Z. Naturforschg. **9a**, 748 [1954].

gie) im Innern des Potentialtopfs konstant ist und am Kernrand unmittelbar auf 0 ansteigt. Beim Protonenpotentialtopf wurde zudem der Einfachheit halber das Coulomb-Potential im Kerninnern durch seinen Mittelwert ersetzt, während außerhalb des Kerns für die Protonen das gewöhnliche Coulomb-Potential gilt. Daß die Tiefe des Protonenpotentialtopfs nur 7 MeV geringer ist als die des Neutronenpotentialtopfs anstatt 16,8 MeV, wie es der mittleren Coulomb-Energie eines in den Kern hineingebrachten Protons entspricht (Volumenausdehnung des Kerns ist dabei nicht berücksichtigt), liegt an der Asymmetrienergie. Man sieht aus den obigen Zeichnungen schon qualitativ, daß die Protonen bei geringerer kinetischer Energie einen höheren Potentialberg am Kernrand (größere rücktreibende Kraft) vor sich haben als die Neutronen. Das bringt mit sich, daß die Protonendichte am Kernrand rascher absinkt als die Neutronendichte. Zur Abschätzung dieses Absinkens der Nukleonendichten wird ein Neutron, das den Mittelwert der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  der Neutronen von 16,6 MeV besitzt, und ein Proton, das den entsprechenden Wert von 12,6 MeV für die Protonen besitzt, betrachtet. Der Radialanteil der Schrödinger-Gleichung für solch ein Nukleon lautet dann:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} u + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} u + V(r) u = E u;$$

$$-\frac{u}{r} = \psi; E = \bar{E}_{\text{kin}} + V(r) \begin{cases} \approx -17,6 \text{ MeV für Neutronen,} \\ \approx -14,6 \text{ MeV für Protonen.} \end{cases} \quad (7)$$

Das zweite Glied in (7) stellt die Zentrifugalenergie des Nukleons dar. Analog zur kinetischen Energie wird auch die Zentrifugalenergie durch ihren Mittelwert (am Kernrand, da innerhalb der betrachteten Abfallsbreite der Nukleonendichte die relative Potentialänderung der Zentrifugalenergie  $\ll 1$  ist) ersetzt. Nach dem Schalenmodell<sup>6</sup> wird für 80 Protonen  $\bar{E}_Z^p \approx 4,3$  MeV und für 120 Neutronen  $\bar{E}_Z^n \approx 5,4$  MeV<sup>13</sup>. Da auch die relative Änderung der Coulomb-Energie innerhalb der Randzone  $\ll 1$  ist, kann man das Coulomb-Potential außerhalb des Kerns zu 14 MeV annehmen.

Löst man mit diesen Daten die obige Schrödinger-Gleichung und berechnet mit der erhaltenen Wellenfunktion den Abstand vom Potentialrand, bei dem die Neutronen- bzw. Protonendichte auf den  $e^2$ -ten Teil vom Mittelwert (auf  $\approx 14\%$ ) abgesunken ist, so ergibt sich:

$$\Delta R_N^I \approx 0,74 \cdot 10^{-13} \text{ cm und } \Delta R_P^I \approx 0,43 \cdot 10^{-13} \text{ cm.} \quad (8)$$

Daraus errechnet sich, daß das für die Protonenverteilung maßgebende  $R_0$  um

$$\Delta R_0^I = \frac{\Delta R_N^I - \Delta R_P^I}{\sqrt{A}} = 0,055 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (9)$$

kleiner ist als das entsprechende  $R_0$  für die Neutronenverteilung.

<sup>13</sup> Es gilt  $\bar{E}_{\text{kin}} = \bar{E}_{\text{kin}}^{\text{rad}} + \bar{E}_Z$ .

<sup>14</sup> E. Freese u. P. Mittelstaedt, Z. Naturforschg., erscheint demnächst.

Ein weiterer Beitrag, der das  $R_0$  für die Protonenverteilung verkleinert, kommt daher, daß das Potential am Kernrand sich nicht sprunghaft ändert, sondern sich diese Änderung über einen Bereich von  $2 \cdot 10^{-13}$  cm erstreckt<sup>10,11</sup>. Das hat zur Folge, daß wegen der größeren Potentialdifferenz für die Protonen der Potentialanstieg steiler ist (größere rücktreibende Kraft) als für die Neutronen.

Zudem ist die kinetische Energie der Protonen geringer. Beide Effekte haben zur Folge, daß bereits nach der klassischen Physik die Protonen weniger weit gegen den Kernrand anlaufen als die Neutronen<sup>14</sup> (s. Abb. 2).

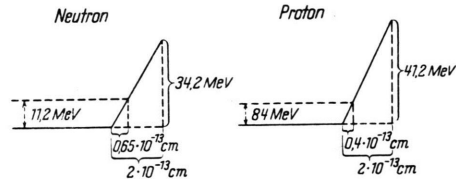


Abb. 2.

11,2 MeV bzw. 8,4 MeV ist die mittlere kinetische Radialenergie der Neutronen bzw. Protonen im Potentialtopf, die für das Anlaufen der Nukleonen gegen die Potentialwand maßgebend ist.

Aus Abb. 2 kann man direkt ablesen, daß diese beiden Effekte ein zusätzliches

$$\Delta R_0^{II} = \frac{\Delta R_N^{II} - \Delta R_P^{II}}{\sqrt{A}} \approx 0,042 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (10)$$

zur Folge haben. Da die Wellenlänge der oben betrachteten Nukleonen ( $\lambda = 2\pi/k \sim 10^{-12}$  cm) groß gegenüber der Potentialanstiegsbreite ist, addieren sich  $\Delta R_0^I$  und  $\Delta R_0^{II}$  zu einem resultierenden<sup>15</sup>

$$\Delta R_0 \approx 0,1 \cdot 10^{-13} \text{ cm.} \quad (11)$$

Das bedeutet, daß das für die Potentialverteilung maßgebende  $R_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-13}$  cm statt  $\approx 1,4 \cdot 10^{-13}$  cm sein müßte. Es kommt also auch jetzt gegenüber dem experimentellen Wert noch um  $\approx 0,1 \cdot 10^{-13}$  cm zu groß heraus. Das hat zwei Gründe. Erstens wurden bei der hier gebrachten groben Abschätzung die energiereichen Teilchen mit kleinem Drehimpuls zu wenig berücksichtigt. Z. B. würde bei alleiniger Betrachtung von  $s=0$  Teilchen mit maximaler Energie  $\Delta R_0 \approx 0,2 \cdot 10^{-13}$  cm werden. Der zweite Grund ist darin zu suchen, daß die elektrostatischen Radiusmessungen auch bei gleicher Neutronen- und Protonenzahl immer kleinere Werte ergeben als die Radiusmessungen, für die nu-

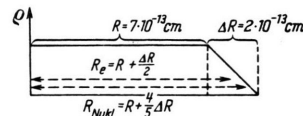


Abb. 3.

<sup>15</sup> Die Änderung von  $\Delta R_0$  mit dem Atomgewicht ist nicht sehr stark. Bei  ${}^{48}_{22}\text{Ti}$  ( $N-Z=4$ ) z. B. ist  $R_0 \approx 0,07 \cdot 10^{-13}$  cm. Für Kerne mit  $N=Z$  muß natürlich  $R_0=0$  bzw. negativ (Coulomb-Kraft) werden.

klare Wechselwirkungen maßgebend sind<sup>1</sup>. Nimmt man z. B. beim  $^{200}_{80}\text{Hg}$ -Kern die in Abb. 3 angedeutete Ladungsverteilung an, dann zeigt die einfache Durchrechnung mittels der Bornschen Näherung, daß diese Ladungsverteilung für die Streuung von Elektronen äquivalent ist einer homogenen Ladungsverteilung (bei derselben Gesamtladung) mit dem Radius  $R_e = R + 1/2 \Delta R \approx 8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Dasselbe gilt für die Radiusausmessung mittels des Spektrums der  $\mu$ -Mesonatome, da hierbei dasselbe maßgebende Wechselwirkungsintegral auftritt. Bei der Radiusausmessung mittels Streuung schneller Nukleonen ist dagegen zu erwarten, daß wegen der starken nuklearen Wechselwirkung (Bohr-

sches Sandsackmodell) auch noch eine ziemlich weit außen liegende Randzone bzgl. Nukleoneneinfang und unelastischer Streuung als schwarz erscheint. Nehmen wir z. B. an, daß der Kernradius, der durch die Nukleonenstreuung bestimmt wird,  $R_{\text{Nukl}} = R + 4/5 \Delta R$  sei, so ergibt sich ein

$$\Delta R_0^{\text{III}} \approx 0,1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (12)$$

D. h., das gesamte resultierende  $\Delta R_0^{\text{res}}$  kommt in die richtige Größenordnung von  $2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Genauere Untersuchungen zu den eben gebrachten groben Abschätzungen werden vorbereitet.

## NOTIZEN

### Über die Halbleitereigenschaften von Galliumphosphid

Von O. G. Folberth und F. Oswald

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG. Erlangen

(Z. Naturforschg. 9a, 1050—1051 [1954]; eingeg. am 1. November 1954)

Die Breite der verbotenen Zone der im Zinkblendegitter kristallisierenden Halbleiter vom Typus A<sup>III</sup>BV nimmt mit abnehmender Ordnungszahl der Komponenten zu<sup>1</sup>. Bei Galliumphosphid (GaP) ist deshalb ein größerer Bandabstand zu erwarten als bei Galliumarsenid (1,35 eV) bzw. Indiumphosphid (1,25 eV)<sup>2</sup>.

Die Verbindung wurde erstmals von V. M. Goldschmidt<sup>3</sup> durch Erhitzen von Galliumhydroxyd in einem mit Phosphor-Dampf gesättigten Wasserstoffstrom bei etwa 500°C hergestellt. Die Strukturbestimmung der entstandenen feinkristallin gesinterten Masse ergab ein Gitter des Zinkblendetyps mit einer Kantenlänge der Elementarzelle von  $a = 5,436 \text{ \AA}$ .

Zur Bestimmung der optischen und elektrischen Halbleitereigenschaften sind jedoch größere, homogene, gutkristallisierte Bereiche der Substanz notwendig. Durch Zusammenschmelzen der Elemente im abgeschmolzenen Quarzrohr und anschließendes langsames, gerichtetes Erstarren der Schmelze ist es gelungen, Galliumphosphid der gewünschten Güte zu erhalten. Die Verbindung ist orange gefärbt, durchsichtig und zeigt bei streifender Betrachtung metallischen Glanz.

Zur Bestimmung der Lage der Absorptionskante, welche in enger Beziehung zur Breite der verbotenen Zone steht, wurde die Lichtdurchlässigkeit von planparallelen, polierten Proben von 0,1 bis 1,0 mm Dicke mit einem registrierenden Spektralphotometer im Wellenlängenbereich von 0,5 bis 15  $\mu$  aufgenommen. Die Absorptionskante, bei allen bisher hergestellten A<sup>III</sup>BV-Verbindungen im infraroten Spektralbereich liegend<sup>3</sup>, ist hier in das sichtbare Gebiet gerückt. Durch

Messungen bei verschiedenen Temperaturen im Bereich von etwa 100°K bis 500°K konnte die Verschiebung der Kante mit der Temperatur bestimmt werden. Dabei ergab sich für die Lage der Kante (ausgedrückt in Elektronenvolt) eine lineare Abhängigkeit von der Temperatur  $T$ , die sich in dem gemessenen Bereich darstellen läßt durch

$$\Delta E = 2,4 - 5,5 \cdot 10^{-4} \cdot T \text{ [eV]}.$$

Die Lage der Absorptionskante am absoluten Nullpunkt (2,4 eV) wurde durch Extrapolation ermittelt.

Die Durchlässigkeitsmessungen wurden noch durch Aufnahme des Reflexionsvermögens der Substanz in dem genannten Spektralbereich ergänzt. Aus beiden Größen ließen sich dann nach dem in einer früheren Arbeit<sup>2</sup> angegebenen Verfahren die optischen Konstanten (Absorptionskonstante  $K$  und Brechungsindex  $n$ ) von Galliumphosphid berechnen (Abb. 1). Im Bereich

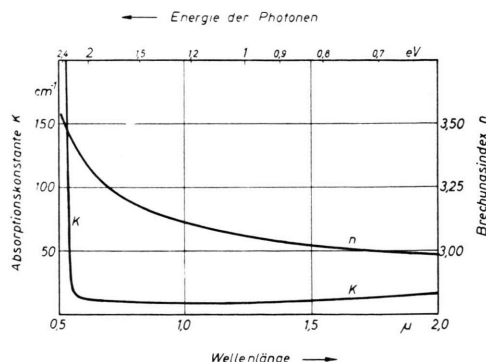


Abb. 1.

von 0,51 bis 0,77  $\mu$  wurde der Brechungsindex außerdem durch Messungen der Lichtbrechung an einem Galliumphosphid-Prisma von etwa 15° brechendem Winkel und 1 mm Basisbreite bestimmt. In diesem

<sup>1</sup> H. Welker, Z. Naturforschg. 7a, 744 [1952]; 8a, 248 [1953].

<sup>2</sup> F. Oswald u. R. Schade, Z. Naturforschg. 9a, 611 [1954].

<sup>3</sup> Gmelins Handbuch der anorg. Chemie, System Nr. 36, 95 [1936].